INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION CONCOURS D'ADMISSION DE 1988 OPTION ECONOMIQUE

M A T H E M A T I Q U E S I

DUREE : 4 heures - COEFFICIENT : 5

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants.

EXERCICE I

p désigne un entier naturel non nul; a un réel strictement positif.

1°) En étudiant, sur $]0, +\infty[$ la fonction θ définie par :

$$\theta(t) = (p-1)t + \frac{a^p}{t^{p-1}}$$, démontrer l'inégalité :

$$(1) \qquad \forall t > 0 \qquad (p-1)t + \frac{a^p}{t^{p-1}} \geqslant pa$$

2°) On désigne par x le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ de réels strictement positifs, puis on définit $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$ par :

$$m_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p} \qquad m_2(x) = \sqrt[p]{x_1 x_2 \ldots x_p}$$

$$\frac{1}{m_3(x)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_p}\right]$$

a) Etablir par récurrence sur p, et à l'aide de l'inégalité (1), que $m_2(x) \leqslant m_1(x)$. On supposera la propriété vraie pour p-1 et l'on utilisera l'inégalité (1) en posant :

$$t = \sqrt[p-1]{x_1 x_2 \ldots x_{p-1}}$$

b) En déduire : $m_3(x) \leqslant m_2(x) \leqslant m_1(x)$.

3°) On définit 3 suites de réels strictement positifs (u_n), (v_n), (w_n) par :

i) $0 < w_0 \leqslant v_0 \leqslant u_0$ et

ii) $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}$ $\qquad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$

$$\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right]$$

a) Montrer que $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$

b) Montrer que : (u_n) est décroissante, (w_n) croissante.
En déduire que (u_n) et (w_n) convergent.

c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - w_{n+1}) \leqslant \frac{2}{3}(u_n - w_n)$

d) En déduire que (u_n), (v_n), (w_n) convergent vers la même limite.

T.S.V.P.

EXERCICE II.

1°) Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

2°) Montrer que l'on peut trouver a et b tels que la fonction g définie par:

$$g(0) = a \; ; \qquad g(1) = b \; ;$$

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \quad \text{pour } x>0 \text{ et } x \neq 1$$

soit continue sur $\mathbb{R}_+$

3°) La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

4°) On pose, pour $h \neq 0$, $\theta(h) = \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$

A l'aide d'un développement limité, à un ordre que l'on précisera, de la fonction $\ln(1+h)$, montrer que la fonction θ a une limite quand h tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?

5°) Etudier et représenter graphiquement la fonction g.

EXERCICE III.

1°) k étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur R par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t<0 \text{ et } f(t) = k\, e^{-kt} \text{ si } t\geqslant 0$$

Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X absolument continue.

2°) Quelle est la fonction F de répartition de X ?

3°) Justifier l'existence et calculer la valeur de l'espérance et dela variance de X.

4°) La durée T, en minutes, d'une communication téléphonique urbaine suit une loi de densité de probabilité f, c'est-à-dire que :

$$P(T\leqslant t) = F(t)$$

a) Calculer pour k = 0.8 la probabilité pour qu'une communication dure plus de quatre minutes.

b) Calculer pour k = 0.8 la probabilité pour qu'une communication dure entre 3 et 5 minutes.

c) Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication soit supérieure à 3 minutes, soit égale à 1/10.

==========

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail